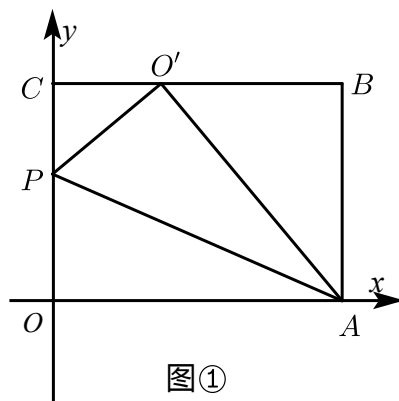


第2讲几何变换之对称（练习）

1. 将一个矩形纸片 $OABC$ 放置在平面直角坐标系中，点 $O(0,0)$ ，点 $A(8,0)$ ，点 $C(0,6)$ ， P 是边 OC 上的一点（点 P 不与点 O, C 重合），沿着 AP 折叠该纸片，得点 O 的对应点 O' 。

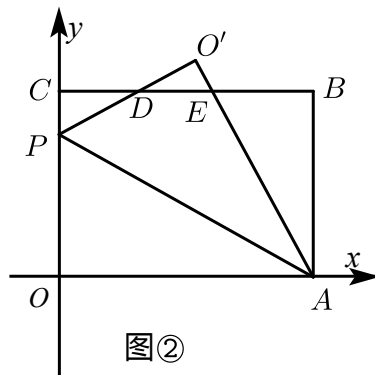
（1）如图①，当点 O' 落在边 BC 上时，求点 O' 的坐标。



图①

（2）若点 O' 落在边 BC 的上方， $O'P$ ， $O'A$ 与边 BC 交于点 D ， E 。

① 如图②，当 $\angle OAP = 30^\circ$ 时，求点 D 的坐标。



图②

② 当 $CD = O'D$ 时，求点 D 的坐标（直接写出结果即可）。

【答案】（1） $O'(8 - 2\sqrt{7}, 6)$ 。

（2）① $D(6\sqrt{3} - 8, 6)$ 。

② $D(\frac{9}{4}, 6)$ 。

【解析】（1）由折叠可知： $AO = AO' = 8$ ，

在 $Rt\triangle ABO'$ 中： $BO' = \sqrt{AO'^2 - AB^2} = \sqrt{8^2 - 6^2} = 2\sqrt{7}$ ，

$\therefore CO' = BC - BO' = 8 - 2\sqrt{7}$ ，

$\therefore O'(8 - 2\sqrt{7}, 6)$ 。

（2）① $\because \angle OAP = 30^\circ$

$\therefore OP = OA \tan 30^\circ = \frac{8}{3}\sqrt{3}$ ， $CP = OC - OP = 6 - \frac{8}{3}\sqrt{3}$ ，

$$\begin{aligned}
&\text{由折叠知：}\angle OPA = \angle O'PA = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ, \\
&\therefore \angle CPO = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ, \\
&\therefore CD = CP \tan 60^\circ = 6\sqrt{3} - 8, \\
&\therefore D(6\sqrt{3} - 8, 6).
\end{aligned}$$

② 设 $OP = x$,

当 $CD = O'D$ 时, 可得:

$$\triangle CPD \cong \triangle O'ED,$$

$$\therefore CP = O'E = 6 - x,$$

$$CD = DO', PD = DE,$$

$$\therefore DE = PO' = OP = x,$$

$$\therefore AE = AO' - O'E = 8 - (6 - x) = x + 2,$$

$$BE = BC - CE = 8 - x,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ABE \text{ 中: } AB^2 + BE^2 = AE^2,$$

$$\text{即 } (6 + x)^2 = (8 - x)^2 + 6^2,$$

$$\text{解得: } x = \frac{24}{5},$$

$$\therefore CP = 6 - \frac{24}{5} = \frac{6}{5},$$

$$\text{设 } CD = y, \text{ 则 } DP = \frac{24}{5} - y,$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle CDP \text{ 中: } CD^2 + CP^2 = DP^2,$$

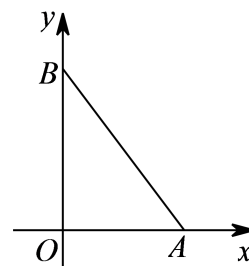
$$\text{即 } y^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \left(\frac{24}{5} - y\right)^2,$$

$$\text{解得: } y = \frac{9}{4},$$

$$\therefore D\left(\frac{9}{4}, 6\right).$$

【标注】【知识点】翻折问题与勾股定理

2. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 $A(3, 0)$, 点 $B(0, 3\sqrt{3})$ 点 O 为原点. 动点 C 、 D 分别在直线 AB , OB 上, 将 $\triangle BCD$ 沿着 CD 折叠, 得 $\triangle B'CD$.



- (1) 如图1, 若 $CD \perp AB$, 点 B' 恰好落在点 A 处, 求此时点 D 的坐标.

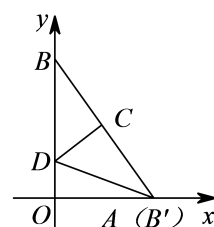


图1

(2) 如图2, 若 $BD = AC$, 点 B' 恰好落在 y 轴上, 求此时点 C 的坐标.

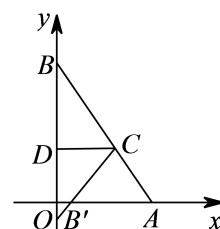


图2

(3) 若点 C 的横坐标为 2, 点 B' 落在 x 轴上, 求点 B' 的坐标 (直接写出结果即可).

【答案】 (1) $D(0, \sqrt{3})$.

(2) $C(12 - 6\sqrt{3}, 18 - 9\sqrt{3})$.

(3) $B'(2 - \sqrt{13}, 0)$ 或 $(2 + \sqrt{13}, 0)$.

【解析】 (1) $\because$ 点 $A(3, 0)$, 点 $B(0, 3\sqrt{3})$,

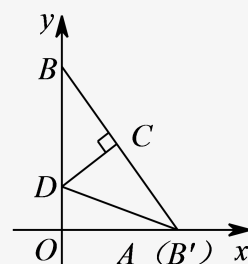
$$\therefore AB = 6, \angle ABO = 30^\circ, \angle BAO = 60^\circ,$$

$\because CD \perp AB$, 点 B' 恰好落在 A 处,

$$\therefore BC = \frac{1}{2} AB = 3,$$

$$\therefore BD = \frac{BC}{\cos 30^\circ} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore D(0, \sqrt{3}).$$



(2) 当 $BD = AC = m$, 则 $BC = 6 - m$,

$\because$ 点 B' 落在 y 轴上,

$\therefore CD \perp OB$,

$\therefore \triangle CBD \sim \triangle ABO$,

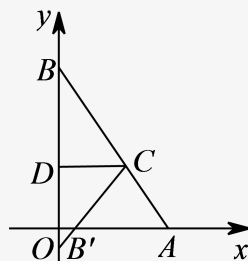
$$\therefore \frac{BD}{BO} = \frac{BC}{BA}, \text{ 即 } \frac{m}{3\sqrt{3}} = \frac{6-m}{6},$$

$$\therefore m = 12\sqrt{3} - 18,$$

$$\therefore OD = 18 - 9\sqrt{3},$$

由点 $A(3, 0)$, $B(0, 3\sqrt{3})$ 可求直线 AB 的解析式为 $y = -\sqrt{3}x + 3\sqrt{3}$,

令 $y = 18 - 9\sqrt{3}$, 解得 $x = 12 - 6\sqrt{3}$,



$$\therefore C(12 - 6\sqrt{3}, 18 - 9\sqrt{3}).$$

(3) $\therefore C$ 的横坐标 2,

$$\therefore AM = 1,$$

$$AC = 2, BC = 4,$$

在 $\text{Rt}\triangle AMC$ 中, $CM = \sqrt{3},$

$$B'C = 4, B'M = \sqrt{13},$$

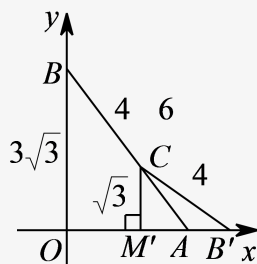
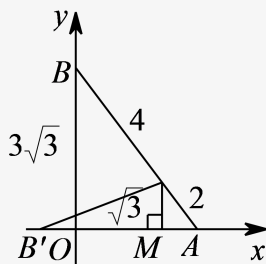
$$OB' = \sqrt{13} - 2,$$

$$B'(2 - \sqrt{13}, 0),$$

$$AM' = 1, OM' = 2, M'B' = \sqrt{13},$$

$$OB' = 2 + \sqrt{13},$$

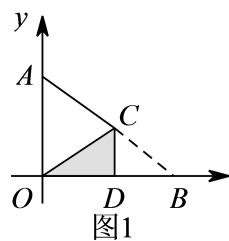
$$\therefore B'(2 + \sqrt{13}, 0).$$



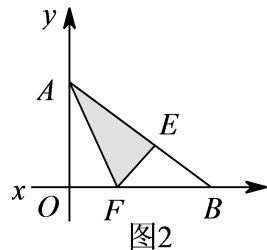
【标注】【知识点】三角形折叠

3. 如图, $\text{Rt}\triangle AOB$ 的两直角边 OB 、 OA 分别位于 x 轴、 y 轴上, $OA = 6$, $OB = 8$.

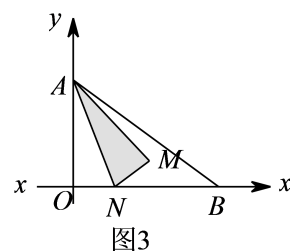
(1) 如图1, 将 $\triangle AOB$ 折叠, 点 B 恰好落在点 O 处, 折痕为 CD , 求点 C 的坐标.



(2) 如图2, 将 $\triangle AOB$ 折叠, 点 O 恰好落在 AB 边上的点 E 处, 折痕为 AF , 求点 E 的坐标.



(3) 如图3, 将 $\triangle AOB$ 折叠, 点 O 落在 $\triangle AOB$ 内的点 M 处, 折痕为 AN , 若 $ON = 2$, 求点 M 的坐标. (直接写出结果即可)



【答案】(1) $C(4, 3)$.

(2) $E\left(\frac{24}{5}, \frac{12}{5}\right)$.

(3) $M\left(\frac{18}{5}, \frac{6}{5}\right)$.

【解析】(1) 由折叠的性质得 $OD = BD = 4$, $CD \perp OB$,

$$\therefore CD \parallel OA,$$

$$\therefore \frac{CD}{OA} = \frac{BD}{BO} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore CD = 3,$$

$$\therefore C(4, 3).$$

(2) 在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中, $AO = 6$, $BO = 8$,

$$\therefore AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = 10,$$

由题意知 $AE = AO = 6$,

$$\therefore EB = 10 - 6 = 4,$$

过点 E 作 $EM \perp OB$,

$$\sin \angle ABO = \frac{6}{10} = \frac{3}{5},$$

$$\sin \angle EBO = \frac{EM}{EB}, \text{ 且 } \angle ABO = \angle EBO,$$

$$\therefore \frac{EM}{EB} = \frac{3}{5}, EM = \frac{3}{5}EB = \frac{3}{5} \times 4 = \frac{12}{5},$$

$$\text{同理 } \frac{8}{10} = \frac{BM}{4}, BM = \frac{16}{5},$$

$$OM = BO - BM = 8 - \frac{16}{5} = \frac{24}{5},$$

$$\therefore E\left(\frac{24}{5}, \frac{12}{5}\right).$$

(3) 连接 OM 交 AN 于点 H ,

在 $\text{Rt}\triangle ONA$ 中, $ON = 2$, $OA = 6$,

$$\therefore AN = \sqrt{2^2 + 6^2} = 2\sqrt{10},$$

由翻折的性质得 $OH \perp AN$, 且 $OM = 2OH$,

$$\therefore S_{\triangle AON} = ON \times OA \times \frac{1}{2} = AN \times OH \times \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 2 \times 6 = 2\sqrt{10} \times OH \times \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} \therefore OH &= \frac{3}{5}\sqrt{10}, \\ \therefore OM &= \frac{6}{5}\sqrt{10}, \\ \text{过} M \text{点作} MF &\perp x \text{轴于点} F, \\ \therefore AN &\perp OH, \\ \therefore \angle MOF + \angle HNO &= 90^\circ, \\ \text{又} \because \angle ANO + \angle OAN &= 90^\circ, \\ \therefore \angle OAN &= \angle MOF, \\ \text{又} \because \angle AON &= \angle OFM = 90^\circ, \\ \therefore \triangle AON &\sim \triangle OFM, \\ \therefore \frac{OF}{OA} &= \frac{MF}{ON} = \frac{OM}{AN}, \text{即} \frac{OF}{6} = \frac{MF}{2} = \frac{\frac{6}{5}\sqrt{10}}{2\sqrt{10}} = \frac{3}{5}, \\ \text{解得} OF &= \frac{18}{5}, MF = \frac{6}{5}, \\ \therefore M &\left(\frac{18}{5}, \frac{6}{5}\right). \end{aligned}$$

【标注】【知识点】其它翻折问题

4. 如图所示，将矩形纸片 $OABC$ 放置在直角坐标系中，点 $A(3, 0)$ ，点 $C(0, \sqrt{3})$ 。

(1) 如图1，经过点 O 、 B 折叠纸片，得折痕 OB ，点 A 的对应点为 A_1 ，求 $\angle A_1OC$ 的度数。

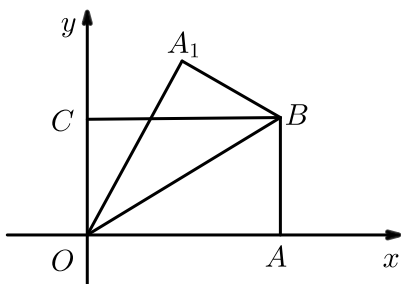


图 1

(2) 如图2，点 M 、 N 分别为边 OA 、 BC 上的动点，经过点 M 、 N 折叠纸片，得折痕 MN ，点 B 的对应点为 B_1 。

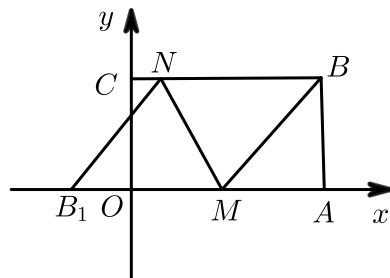


图 2

- ① 当点 B_1 的坐标为 $(-1, 0)$ 时，请你判断四边形 $MBNB_1$ 的形状，并求出它的周长。
- ② 若点 N 与点 C 重合，当点 B_1 落在坐标轴上时，直接写出点 M 的坐标。

【答案】(1) 30° .

(2) ① 菱形; $\frac{19}{2}$.

② $(3 - \sqrt{6}, 0)$.

【解析】(1) $\because A(3, 0)C(0, \sqrt{3})$,

且四边形 $OACB$ 是矩形.

$\therefore B$ 点坐标为 $(3, \sqrt{3})$.

$\therefore OA = BC = 3$.

$AB = OC = \sqrt{3}$.

$\therefore OB = \sqrt{OA^2 + AB^2} = 2\sqrt{3}$.

$\therefore$ 在 $Rt\triangle OAB$ 中, $AB = \frac{1}{2}OB$,

$\therefore \angle AOB = 30^\circ$.

$\therefore$ 由折叠知 $\angle A_1OB = \angle AOB = 30^\circ$,

$\therefore \angle A_1OC = 90^\circ - \angle A_1OB - \angle AOB = 30^\circ$.

(2) ① 由折叠知 $BN = B_1N$.

$\angle BNM = \angle B_1NM$, $\angle BMN = \angle B_1MN$.

$\therefore BN \parallel B_1M$,

$\therefore \angle BNM = \angle B_1MN$.

$\therefore \angle B_1NM = \angle BMN$.

$\therefore B_1N \parallel BM$.

$\therefore$ 四边形 B_1MBN 是菱形.

设 M 点坐标为 $(a, 0)$ 且 B_1 坐标 $(-1, 0)$,

$\therefore BM = B_1M = a + 1$.

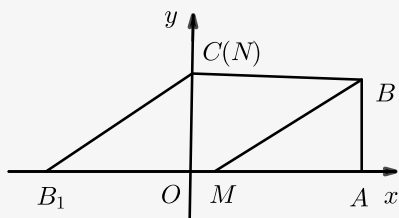
$AM = OA - OM = 3 - a$.

$\therefore (3 - a)^2 + (\sqrt{3})^2 = (a + 1)^2$.

解为 $a = \frac{11}{8}$.

$\therefore$ (四边形) B_1MBN 的周长 $= 4BM = 4(a + 1) = \frac{19}{2}$.

②



由①知, 四边形 B_1MBN 是菱形,

$$\therefore B_1C = B_1M = BM = BC = 3.$$

$$\therefore \text{且 } OC = \sqrt{3},$$

$$\therefore OB_1 = \sqrt{B_1C^2 - OC^2} = \sqrt{6}.$$

$$\therefore OM = B_1M - OB_1 = 3 - \sqrt{6}.$$

$$\therefore M \text{ 点的坐标为 } (3 - \sqrt{6}, 0).$$

【标注】【知识点】翻折问题与勾股定理

5. 在平面直角坐标系中, $\triangle ABC$ 的顶点坐标分别为 $A(3, 0)$, $B(0, 4)$, $C(-3, 0)$. 动点 M , N 同时从点 A 出发, M 沿 $A \rightarrow C$, N 沿折线 $A \rightarrow B \rightarrow C$, 均以每秒 1 个单位长度的速度移动, 当一个动点到达终点 C 时, 另一个动点也随之停止移动, 移动时间记为 t 秒, 连接 MN .

(1) 如图 1, 当点 N 移动到 AB 中点时, 求此时 t 的值及 M 点坐标.

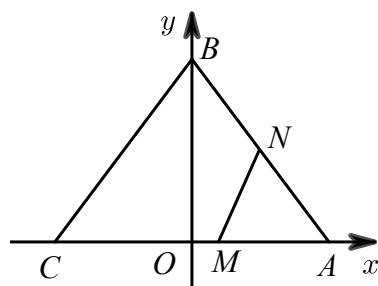


图 1

(2) 在移动过程中, 将 $\triangle AMN$ 沿直线 MN 翻折, 点 A 的对称点为 A_1 .

① 如图 2, 当点 A_1 恰好落在 BC 边上的点 D 处时, 求此时 t 的值.

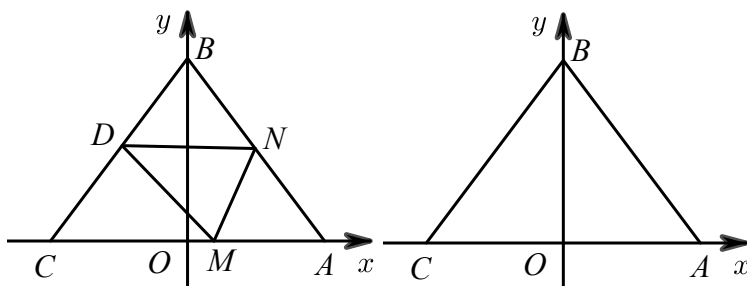


图 2

备用图

② 当点 M 移动到点 C 时, 点 A_1 落在点 E 处, 求此时点 E 的坐标 (直接写出结果即可).

【答案】(1) $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

(2) ① $\frac{30}{11}$.

② $\left(-\frac{117}{25}, \frac{144}{25}\right)$.

【解析】(1) $\because A(3, 0)$, $B(0, 4)$,

$$\therefore OA = 3, OB = 4, \therefore AB = 5.$$

当点 N 移动到 AB 中点时, 由题意可得 $AN = AM = \frac{5}{2}$,

$$\therefore t = \frac{5}{2},$$

$$\therefore OM = OA - AM = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \text{点 } M \text{ 坐标为 } \left(\frac{1}{2}, 0\right).$$

(2) ① 由题意可得 $AM = AN = t$,

$\therefore \triangle AMN$ 沿直线 MN 翻折, 点 A_1 落在点 D 处,

$$\therefore AM = AN = MD = ND = t,$$

$\therefore$ 四边形 $AMND$ 为菱形,

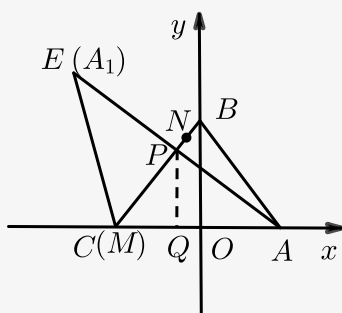
$$\therefore BN = 5 - t, DN \parallel x \text{ 轴},$$

$$\therefore \triangle BDN \sim \triangle BCA,$$

$$\therefore \frac{DN}{CA} = \frac{BN}{BA}, \frac{t}{6} = \frac{5-t}{5},$$

$$\text{解得 } t = \frac{30}{11}.$$

② 如图, 过点 P 作 $PQ \perp x$ 轴于点 Q ,



由题意可知, 将 $\angle AMN$ 沿直线 MN 对折,

可得 $\triangle ACP \cong \triangle ECP$,

$$\therefore AP = EP, AE \perp BC,$$

$\triangle ABC$ 中, $AC = 6, BO = 4, BC = 5$,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BO = \frac{1}{2} BC \cdot AP,$$

$$\therefore AC \cdot BO = BC \cdot AP,$$

$$\therefore 5AP = 24, AP = \frac{24}{5},$$

又 $\triangle APQ \sim \triangle ACN$,

$$\therefore AP^2 = AQ \cdot AC,$$

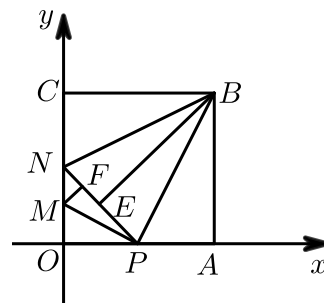
$$\therefore 6AQ = \frac{576}{25}$$

$$AQ = \frac{96}{25},$$

$$\begin{aligned}
\therefore OQ &= AQ - OA = \frac{96}{25} - 3 = \frac{21}{25}, \\
\therefore CQ &= 6C - OQ = 3 - \frac{21}{25} = \frac{54}{25}, \\
\text{又} \because PQ &\parallel BO, \\
\therefore \triangle CPQ &\sim \triangle CBO, \\
\therefore \frac{PO}{BO} &= \frac{CQ}{CO}, \\
\therefore \frac{PQ}{4} &= \frac{\frac{54}{25}}{3}, \\
\therefore PQ &= \frac{72}{25}, \\
\therefore P &\left(-\frac{21}{25}, \frac{72}{25}\right), \\
\therefore A &(3, 0), \\
\therefore E &\left(-\frac{117}{25}, \frac{144}{25}\right).
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

6. 如图，在平面直角坐标系 xOy 第一象限中有正方形 $OABC$ ， $A(4, 0)$ ，点 $P(m, 0)$ 是 x 轴上一动点 ($0 < m < 4$)，将 $\triangle ABP$ 沿直线 BP 翻折后，点 A 落在点 E 处，在 OC 上有一点 $M(0, t)$ ，使得将 $\triangle OMP$ 沿直线 MP 翻折后，点 O 落在直线 PE 上的点 F 处，直线 PE 交 OC 于点 N ，连接 BN 。



- (1) 求证： $BP \perp PM$ 。
(2) 求 t 与 m 的函数关系式，并求出 t 的最大值。
(3) 当 $\triangle ABP \cong \triangle CBN$ 时，直接写出 m 的值。

【答案】(1) 证明见解析。

(2) $t = \frac{1}{4}(m-2)^2 + 1$ ， t 的最大值为 1。

(3) $8 - 4\sqrt{2}$ 。

【解析】(1) $\because \angle APB = \angle EPB$,

$$\angle MPO = \angle MPN,$$

$$\angle OPN + \angle NPA = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle MPN + \angle NPB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BPM = 90^\circ,$$

即 $BP \perp PM$.

$$(2) \because \angle OPM + \angle APB = 90^\circ,$$

$$\angle APB + \angle ABP = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OPM = \angle ABP,$$

$\because$ 四边形 $OABC$ 是正方形, $OM = t$, $OP = m$,

$$\therefore \triangle OPM \sim \triangle ABP,$$

$$\therefore \frac{OM}{OP} = \frac{AP}{AB},$$

$$\therefore t = \frac{1}{4}m(4-m) = \frac{1}{4}(m-2)^2 + 1, (0 < m < 4),$$

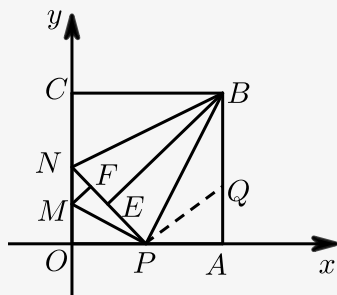
$\therefore$ 当 $m = 2$ 时 t 的最大值为 1.

$$(3) \because \triangle ABP \cong \triangle CBN,$$

易证 $\triangle CBN \cong \triangle EBN$ (HL),

$$\therefore \angle ABP = \angle CBN = 22.5^\circ,$$

在 AB 上取一点 Q 使得 $BQ = PQ$,



$$\therefore \angle QBP = \angle QPB = 22.5^\circ,$$

$$\therefore \angle AQP = \angle QBP + \angle QPB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle APQ = 45^\circ.$$

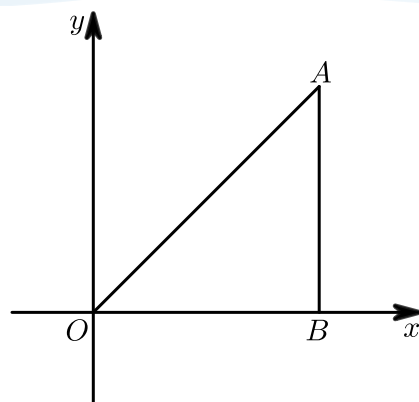
$$\therefore AQ = AP = 4 - m, QP = QB = \sqrt{2}(4 - m),$$

$$\therefore AQ + QB = 4 - m + \sqrt{2}(4 - m) = 4,$$

$$\therefore m = 8 - 4\sqrt{2}.$$

【标注】【知识点】全等三角形的对应边与角

7. 如图, 将一个直角三角形纸片 AOB , 放置在平面直角坐标系中, 点 $A(3, 3)$, 点 $B(3, 0)$, 点 $O(0, 0)$. 将 $\triangle AOB$ 沿 OA 翻折得到 $\triangle AOD$ (点 D 为点 B 的对应点).



(1) 求 OA 的长及点 D 的坐标.

(2) 点 P 是线段 OD 上的点, 点 Q 是线段 AD 上的点.

① 已知 $OP = 1$, $AQ = \frac{4}{3}$, R 是 x 轴上的动点, 当 $PR + QR$ 取最小值时, 求出点 R 的坐标及点 D 到直线 RQ 的距离.

② 连接 BP , BQ , 且 $\angle PBQ = 45^\circ$, 现将 $\triangle OAB$ 沿 AB 翻折得到 $\triangle EAB$ (点 E 为点 O 的对应点), 再将 $\angle PBQ$ 绕点 B 顺时针旋转, 旋转过程中, 射线 BP , BQ 交直线 AE 分别为点 M , N , 最后将 $\triangle BMN$ 沿 BN 翻折得到 $\triangle BGN$ (点 G 为点 M 的对应点), 连接 EG , 若 $\frac{EN}{EG} = \frac{5}{12}$, 求点 M 的坐标 (直接写出结果即可).

【答案】 (1) $AO = 3\sqrt{2}$, $D(0, 3)$.

(2) ① $R\left(\frac{5}{12}, 0\right)$, 点 D 到直线 RQ 的距离为 $\frac{20}{13}$.

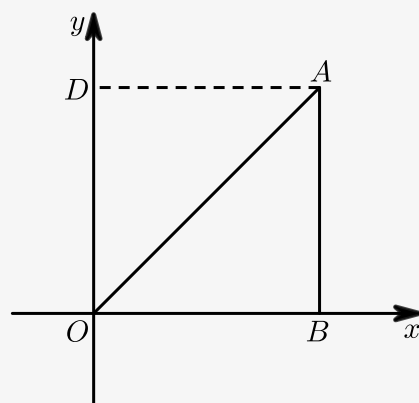
② $M\left(\frac{21}{5}, \frac{9}{5}\right)$ 或 $M\left(\frac{24}{5}, \frac{6}{5}\right)$ 或 $M(-3, 9)$.

【解析】 (1) $\because A(3, 3)$, $B(3, 0)$,

$$\therefore OB = AB = 3,$$

$$\therefore AO = \sqrt{OB^2 + AB^2} = 3\sqrt{2},$$

$\therefore$ 将 $\triangle AOB$ 沿 OA 翻折得到 $\triangle AOD$,



可知点 D 在 y 轴上且 $OD = OB = 3$,

$$\therefore D(0, 3).$$

(2) ① 如图①, 作点 P 关于 x 轴的对称点 P' , 连接 $P'Q$ 交 x 轴于点 R , 此时 $PR + QR$ 取最小值,

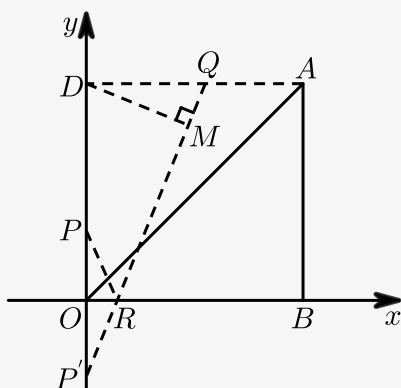


图 ①

$$\because OP = 1,$$

$$\therefore P(0, 1),$$

$$\therefore P'(0, -1),$$

$$\because AQ = \frac{4}{3}, AD = AB = 3,$$

$$\therefore OQ = \frac{5}{3},$$

$$\therefore Q\left(\frac{5}{3}, 3\right),$$

$$\text{设直线 } P'Q: y = kx + b (k \neq 0),$$

$$\text{则 } \begin{cases} \frac{5}{3}k + b = 3, \\ b = -1 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} k = \frac{12}{5}, \\ b = -1 \end{cases},$$

$$\therefore y = \frac{12}{5}x - 1,$$

$$\therefore \text{当 } y = 0 \text{ 时, } \frac{12}{5}x - 1 = 0,$$

$$\text{解得 } x = \frac{5}{12},$$

$$\therefore R\left(\frac{5}{12}, 0\right).$$

如图①, 过点 D 作 $DM \perp QR$ 交 QR 于点 M ,

$$\therefore DQ = \frac{5}{3}, DP' = OD + OP' = 4,$$

$$\therefore S_{\triangle P'DQ} = \frac{1}{2}DQ \cdot DP' = \frac{1}{2} \times \frac{5}{3} \times 4 = \frac{10}{3},$$

$$\therefore P'Q = \sqrt{\left(\frac{5}{3} - 0\right)^2 + (3 + 1)^2} = \frac{13}{3},$$

$$S_{\triangle P'DQ} = \frac{1}{2}P'Q \cdot DM,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times \frac{13}{3}DM = \frac{10}{3},$$

$$\therefore DM = \frac{20}{13},$$

$\therefore$ 点 D 到直线 RQ 的距离为 $\frac{20}{13}$.

② $\because \triangle ABE$ 是由 $\triangle AOB$ 翻折得到的 ,

$$\therefore BE = OB = 3 ,$$

$$\therefore E(6, 0) ,$$

(I) 如图② , 当 $\angle MBN$ 在 $\triangle ABE$ 内部时 ,

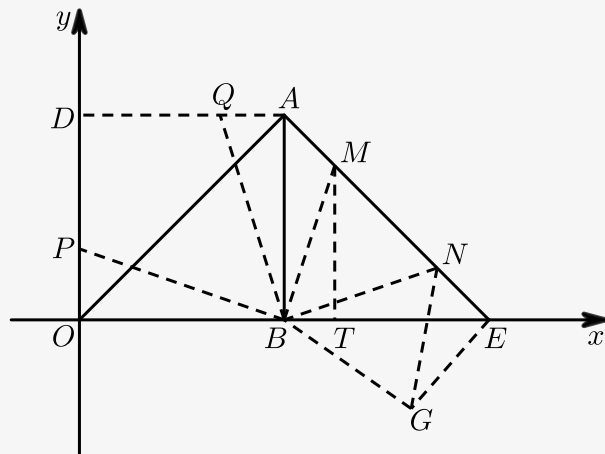


图 ②

$$\therefore \angle MBN = 45^\circ ,$$

$$\therefore \angle ABM + \angle NBE = 45^\circ ,$$

$$\therefore \angle ABM = 45^\circ - \angle NBE ,$$

$$\therefore \angle EBG = 45^\circ - \angle NBE ,$$

$$\therefore \angle ABM = \angle EBG ,$$

在 $\triangle ABM$ 和 $\triangle EBG$ 中 ,

$$\begin{cases} BA = BE = 3 \\ \angle ABM = \angle EBG , \\ BM = BG \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABM \cong \triangle EBG (\text{SAS}) ,$$

$$\therefore \angle BAM = \angle BEG = 45^\circ , AM = EG ,$$

$$\therefore \angle NEG = \angle NEB + \angle BEG = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ ,$$

$$\therefore \frac{EN}{EG} = \frac{5}{12} ,$$

$$\therefore \text{设 } EN = 5k , EG = 12k ,$$

$$\therefore NG = \sqrt{EN^2 + EG^2} = 13k ,$$

$$\therefore AM = EG = 12k , MN = NG = 13k ,$$

$$\therefore AE = AM + MN + NE = 12k + 13k + 5k = 30k ,$$

$$\therefore AE = AO = 3\sqrt{2} ,$$

$$\therefore 30k = 3\sqrt{2} , \text{ 即 } k = \frac{\sqrt{2}}{10} ,$$

$$\therefore AM = \frac{3}{5}\sqrt{2} , MN = \frac{13}{10}\sqrt{2} , NE = \frac{\sqrt{2}}{2} ,$$

$$\therefore ME = MN + NE = \frac{9}{5}\sqrt{2},$$

过点M作 $MT \perp BE$ 于点T,

$$\therefore \frac{MT}{AB} = \frac{ME}{AE},$$

$$\therefore \frac{MT}{3} = \frac{\frac{9}{5}\sqrt{2}}{3\sqrt{2}},$$

$$\therefore MT = \frac{9}{5},$$

$$\therefore \angle AEB = \angle AOB = 45^\circ,$$

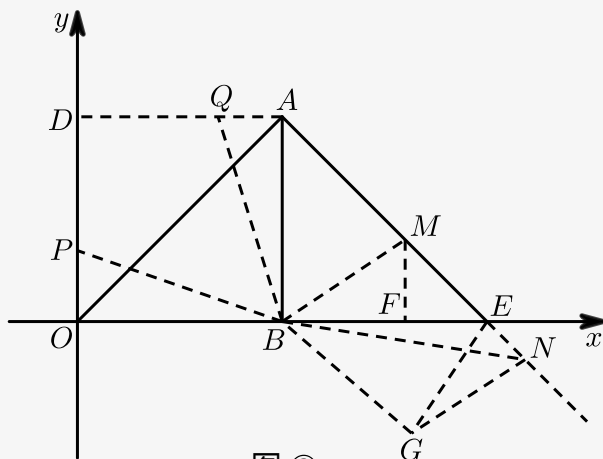
$$\therefore MT = ET = \frac{9}{5},$$

$$\therefore BT = BE - ET = 3 - \frac{9}{5} = \frac{6}{5},$$

$$\therefore OT = 3 + \frac{6}{5} = \frac{21}{5},$$

$$\therefore M\left(\frac{21}{5}, \frac{9}{5}\right).$$

(II) 当N在AE延长线上时, 如图③,



图③

$$\begin{aligned}\therefore \angle ABM &= 90^\circ - \angle MBE \\ &= 90^\circ - (\angle MBN - \angle EBN) \\ &= 90^\circ - (45^\circ - \angle EBN) \\ &= 45^\circ + \angle EBN,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\angle EBG &= \angle EBN + \angle NBG \\ &= \angle EBN + \angle MBN \\ &= \angle EBN + 45^\circ,\end{aligned}$$

$$\therefore \angle ABM = \angle EBG,$$

在 $\triangle ABM$ 和 $\triangle EBG$ 中,

$$\begin{cases} AB = BE \\ \angle ABM = \angle EBG, \\ BM = BG \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABM \cong \triangle EBG(\text{SAS}),$$

(Ⅲ) 如图④, 当 M 在 EA 延长线时,



16

$$\begin{aligned}
&= 90^\circ - (\angle ABN + \angle NBG) \\
&= 90^\circ - (\angle ABN + \angle MBN) \\
&= 90^\circ - (\angle ABN + 45^\circ) \\
&= 45^\circ - \angle ABN,
\end{aligned}$$

$$\therefore \angle ABM = \angle EBG,$$

在 $\triangle ABM$ 和 $\triangle EBG$ 中,

$$\begin{cases} BM = BG \\ \angle ABM = \angle EBG, \\ AB = BE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABM \cong \triangle EBG (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle BAM = \angle BEG,$$

$$\text{又} \because \angle BAO = \angle BEA = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle NEG = \angle OAM,$$

$$\therefore \angle OAB = \angle BAE = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle OAE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OAM = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle NEG = 90^\circ,$$

$$\therefore \frac{EN}{EG} = \frac{5}{12},$$

$$\therefore \text{设 } EN = 5k, EG = 12k,$$

$$\therefore NG = \sqrt{EN^2 + EG^2} = 13k,$$

$$\therefore MN = NG = 13k, AM = EG = 12k,$$

$$\therefore AN = MN - AM = k,$$

$$\therefore AE = AN + NE = 6k,$$

$$\therefore AE = 3\sqrt{2},$$

$$\therefore 6k = 3\sqrt{2}, \text{ 即 } k = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore ME = MN + NE = 18k = 9\sqrt{2},$$

过点 M 作 $MH \perp x$ 轴于 H ,

$$\therefore \angle AEB = 45^\circ,$$

$$\therefore MH = EH,$$

$$\therefore \frac{AB}{MH} = \frac{AE}{ME},$$

$$\therefore \frac{3}{MH} = \frac{3\sqrt{2}}{9\sqrt{2}},$$

$$\therefore MH = 9,$$

$$\therefore EH = 9,$$

$$\therefore OE = 6,$$

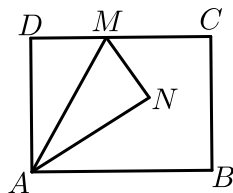
$\therefore$ 点 M 横坐标为 -3 ,

$\therefore M(-3, 9)$.

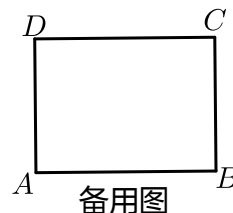
综上: $M\left(\frac{21}{5}, \frac{9}{5}\right)$ 或 $M\left(\frac{24}{5}, \frac{6}{5}\right)$ 或 $M(-3, 9)$.

【标注】【知识点】旋转性质综合应用

8. 如图, 矩形 $ABCD$ 中, $AB = 4$, $AD = 3$, M 是边 CD 上一点, 将 $\triangle ADM$ 沿直线 AM 对折, 得到 $\triangle ANM$.



- (1) 当 AN 平分 $\angle MAB$ 时, 求 DM 的长.
(2) 连接 BN , 当 $DM = 1$ 时, 求 $\triangle ABN$ 的面积.
(3) 当射线 BN 交线段 CD 于点 F 时, 求 DF 的最大值.



【答案】(1) $\sqrt{3}$.

(2) $S_{\triangle NAB} = \frac{24}{5}$.

(3) $4 - \sqrt{7}$.

【解析】(1) 由折叠性质得: $\triangle ANM \cong \triangle ADM$,

$\therefore \angle MAN = \angle DAM$,

$\therefore AN$ 平分 $\angle MAB$, $\angle MAN = \angle NAB$,

$\therefore \angle DAM = \angle MAN = \angle NAB$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore \angle DAB = 90^\circ$,

$\therefore \angle DAM = 30^\circ$,

$\therefore AM = 2DM$, $AD = \sqrt{3}DM$

$\therefore DM = AD \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$.

(2) 延长 MN 交 AB 延长线于点 Q , 如图1所示:

∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形 ,

∴ $AB \parallel DC$,

∴ $\angle DMA = \angle MAQ$,

由折叠性质得 : $\triangle ANM \cong \triangle ADM$,

∴ $\angle DMA = \angle AMQ$, $AN = AD = 3$, $MN = MD = 1$,

∴ $\angle MAQ = \angle AMQ$,

∴ $MQ = AQ$,

设 $NQ = x$, 则 $AQ = MQ = 1 + x$,

∴ $\angle ANM = 90^\circ$,

∴ $\angle ANQ = 90^\circ$,

在 $Rt\triangle ANQ$ 中 , 由勾股定理得 : $AQ^2 = AN^2 + NQ^2$,

∴ $(x+1)^2 = 3^2 + x^2$,

解得 : $x = 4$,

∴ $NQ = 4$, $AQ = 5$,

∴ $AB = 4$, $AQ = 5$,

∴ $S_{\triangle NAB} = \frac{4}{5} S_{\triangle NAQ} = \frac{4}{5} \times \frac{1}{2} AN \cdot NQ = \frac{4}{5} \times \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = \frac{24}{5}$.

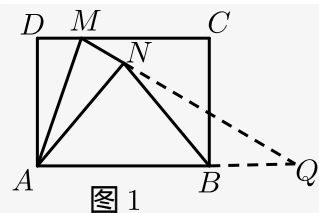


图 1

(3) 过点 A 作 $AH \perp BF$ 于点 H , 如图 2 所示 :

∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形 ,

∴ $AB \parallel DC$,

∴ $\angle HBA = \angle BFC$,

∴ $\angle AHB = \angle BCF = 90^\circ$,

∴ $\triangle ABH \sim \triangle BFC$,

∴ $\frac{BH}{AH} = \frac{CF}{BC}$,

∴ $AH \leq AN = 3$, $AB = 4$,

∴ 可以看到点 N 是在以 A 为圆心 , 3 为半径的圆上运动 , 所以当射线 BN 与圆相切时 , DF 最大 , 此时 B 、 N 、 M 三点共线 , 如图 3 所示 :

由折叠性质得 : $AD = AH$,

∴ $AD = BC$,

∴ $AH = BC$,

在 $\triangle ABH$ 和 $\triangle BFC$ 中 ,

$$\begin{cases} \angle HBA = \angle BFC \\ \angle AHB = \angle BCF , \\ AH = BC \end{cases}$$

∴ $\triangle ABH \cong \triangle BFC$ (AAS) ,

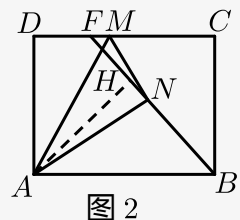


图 2

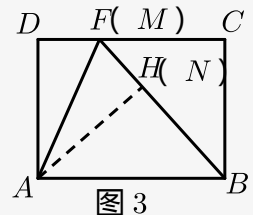


图 3

$$\therefore CF = BH,$$

$$\text{由勾股定理得: } BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7},$$

$$\therefore CF = \sqrt{7},$$

$$\therefore DF \text{ 的最大值} = DC - CF = 4 - \sqrt{7}.$$

【标注】【知识点】全等三角形的性质

9. 如图1, 在平面直角坐标系中, O 是坐标原点, 长方形 $OACB$ 的顶点 A 、 B 分别在 x 轴与 y 轴上, 已知 $OA = 6$, $OB = 10$. 点 D 为 y 轴上一点, 其坐标为 $(0, 2)$, 点 P 从点 A 出发以每秒2个单位的速度沿线段 $AC - CB$ 的方向运动, 当点 P 与点 B 重合时停止运动, 运动时间为 t 秒.

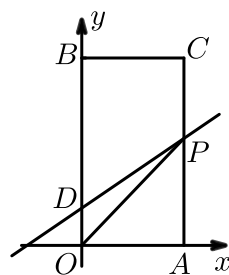


图 1

(1) 当点 P 经过点 C 时, 求直线 DP 的函数解析式.

(2) 请回答下列各题.

① 求 $\triangle OPD$ 的面积 S 关于 t 的函数解析式.

② 如图2, 把长方形沿着 OP 折叠, 点 B 的对应点 B' 恰好落在 AC 边上, 求点 P 的坐标.

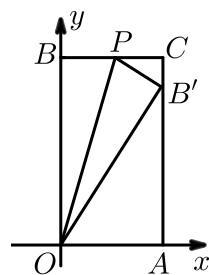
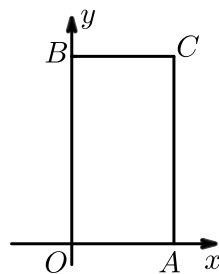


图 2

(3) 点 P 在运动过程中, 请直接写出点 P 的坐标, 使 $\triangle BDP$ 为等腰三角形.



备用图

【答案】 (1) $y = \frac{4}{3}x + 2$.

(2)① $S = -2t + 16$.

② $\left(\frac{10}{3}, 10\right)$.

(3) $(6, 6)$ 或 $(6, 2\sqrt{7} + 2)$ 或 $(6, 10 - 2\sqrt{7})$.

【解析】(1) $\because OA = 6, OB = 10$, 四边形 $OACB$ 为长方形 ,

$\therefore C(6, 10)$,

设此时直线 DP 解析式为 $y = kx + b$,

把 $(0, 2)$, $C(6, 10)$ 分别代入 , 得 $\begin{cases} b = 2 \\ 6k + b = 10 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} k = \frac{4}{3} \\ b = 2 \end{cases}$,

则此时直线 DP 解析式为 $y = \frac{4}{3}x + 2$.

(2)① 当点 P 在线段 AC 上时 , $OD = 2$, 高为 6 , $S = 6$,

当点 P 在线段 BC 上时 , $OD = 2$, 高为 $6 + 10 - 2t = 16 - 2t$,

$S = \frac{1}{2} \times 2 \times (16 - 2t) = -2t + 16$.

② 设 $P(m, 10)$, 则 $PB = PB' = m$,

如图2 ,

$\because OB' = OB = 10, OA = 6$,

$\therefore AB' = \sqrt{OB'^2 - OA^2} = 8$,

$\therefore B'C = 10 - 8 = 2$,

$\therefore PC = 6 - m$,

$\therefore m^2 = 2^2 + (6 - m)^2$,

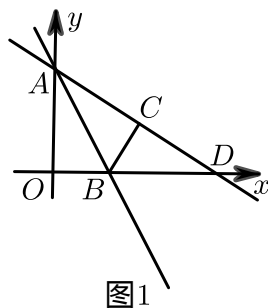
解得 $m = \frac{10}{3}$,

则此时点 P 的坐标是 $\left(\frac{10}{3}, 10\right)$.

(3) P 坐标为 $(6, 6)$ 或 $(6, 2\sqrt{7} + 2)$ 或 $(6, 10 - 2\sqrt{7})$.

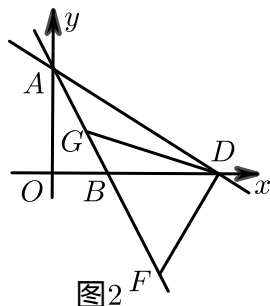
【标注】【知识点】一次函数与面积

10. 如图1 , 直线 $y = -\frac{3}{4}x + 6$ 与 y 轴交于点 A , 与 x 轴交于点 D , 直线 AB 交 x 轴于点 B , $\triangle AOB$ 沿直线 AB 折叠 , 点 O 恰好落在直线 AD 上的点 C 处 .

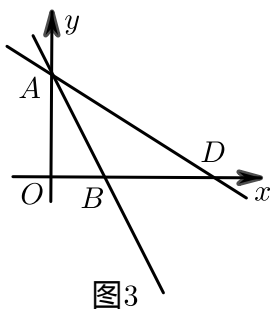


(1) 求 OB 的长.

(2) 如图2, F, G 是直线 AB 上的两点, 若 $\triangle DFG$ 是以 FG 为斜边的等腰直角三角形, 求点 F 的坐标.



(3) 如图3, 点 P 是直线 AB 上一点, 点 Q 是直线 AD 上一点, 且 P, Q 均在第四象限, 点 E 是 x 轴上一点, 若四边形 $PQDE$ 为菱形, 求点 E 的坐标.



【答案】 (1) 3.

(2) $(6, -6)$.

(3) $E(-2, 0)$.

【解析】 (1) 对于直线 $y = -\frac{3}{4}x + 6$, 令 $x = 0$, 得到 $y = 6$, 可得 $A(0, 6)$, 令 $y = 0$, 得到 $x = 8$, 可得 $D(8, 0)$,

$$\therefore AC = AO = 6, OD = 8, AD = \sqrt{OA^2 + OD^2} = 10,$$

$$\therefore CD = AD - AC = 4, \text{ 设 } BC = OB = x, \text{ 则 } BD = 8 - x,$$

在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中,

$$\therefore BC^2 + CD^2 = BD^2,$$

$$\therefore x^2 + 4^2 = (8 - x)^2,$$

$$\therefore x = 3,$$

$$\therefore OB = 3.$$

(2) 设直线 AB 的解析式为 $y = kx + 6$,

$$\therefore B(3, 0),$$

$$\therefore 3k + 6 = 0,$$

$$\therefore k = -2,$$

∴直线 AB 的解析式为 $y = -2x + 6$,

作 $GM \perp x$ 轴于 M , $FN \perp x$ 轴于 N ,

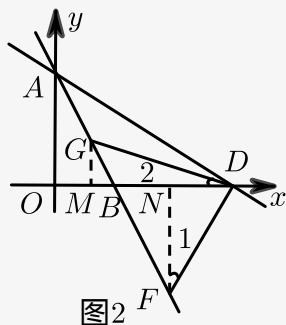


图2

∴ $\triangle DFG$ 是等腰直角三角形,

∴ $DG = FD$, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle DMG = \angle FND = 90^\circ$,

∴ $\triangle DMG \cong \triangle FND$ (AAS),

∴ $GM = DN$, $DM = FN$, 设 $GM = DN = m$, $DM = FN = n$,

∴ G 、 F 在直线 AB 上,

$$\begin{cases} m = -2(8 - n) + 6 \\ -n = -2(8 - m) + 6 \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} m = 2 \\ n = 6 \end{cases}$

∴ $DM = FN = 6$,

∴点 F 的坐标是 $(6, -6)$.

(3) 如图,

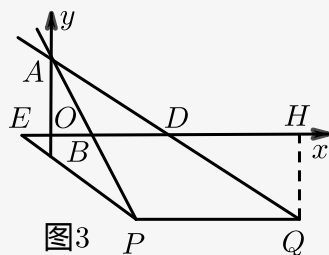


图3

设 $Q\left(a, -\frac{3}{4}a + 6\right)$,

∴ $PQ \parallel x$ 轴, 且点 P 在直线 $y = -2x + 6$ 上,

∴ $P\left(\frac{3}{8}a, -\frac{3}{4}a + 6\right)$,

∴ $PQ = \frac{5}{8}a$, 作 $QH \perp x$ 轴于 H .

∴ $DH = a - 8$, $QH = \frac{3}{4}a - 6$,

∴ $\frac{QH}{DH} = \frac{3}{4}$,

由勾股定理可知: $QH : DH : DQ = 3 : 4 : 5$,

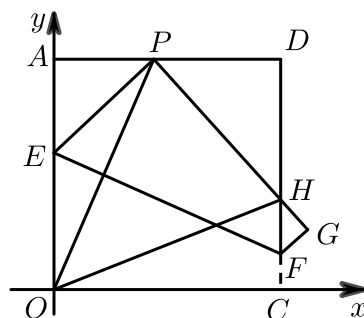
∴ $QH = \frac{3}{5}DQ = \frac{3}{8}a$,

∴ $\frac{3}{8}a = \frac{3}{4}a - 6$,

$$\begin{aligned}\therefore a &= 16, \\ \therefore Q(16, -6), P(6, -6), \\ \therefore ED // PQ, ED &= PQ, D(8, 0), \\ \therefore E(-2, 0).\end{aligned}$$

【标注】【知识点】一次函数与等腰直角三角形

11. 如图，将一个正方形纸片 $A OCD$ ，放置在平面直角坐标系中，点 $A(0, 4)$ ，点 $O(0, 0)$ ，点 D 在第一象限．点 P 为正方形 AD 边上的一点（不与点 A 、点 D 重合），将正方形纸片折叠，使点 O 落在点 P 处，点 C 落在点 G 处， PG 交 DC 于点 H ，折痕为 EF ，连接 OP ， OH ．设 P 点的横坐标为 m ．



- (1) 若 $\angle APO = 60^\circ$ ，求 $\angle OPG$ 的大小．
- (2) 当点 P 在边 AD 上移动时， $\triangle PDH$ 的周长 l 是否发生变化？若变化，用含 m 的式子表示 l ．若不变化，求出周长 l ．
- (3) 设四边形 $EFGP$ 的面积为 S ，当 S 取得最小值时，求点 P 的坐标（直接写出结果即可）．

【答案】(1) 60°

(2) 周长不发生变化，周长为定值 8

(3) $P(2, 4)$

【解析】(1) $\because$ 正方形纸片折叠，使点 O 落在点 P 处，点 C 落在点 G 处，

$$\therefore \angle POC = \angle OPG,$$

$\because$ 四边形 $A OCD$ 是正方形，

$$\therefore AD // OC,$$

$$\therefore \angle APO = \angle POC,$$

$$\therefore \angle APO = \angle OPG,$$

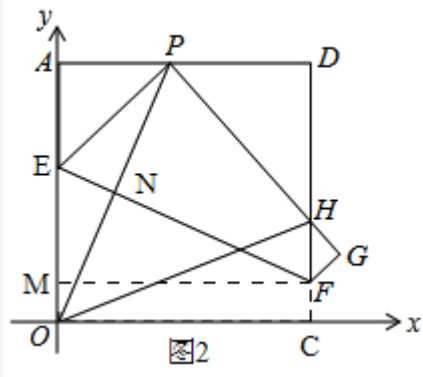
$$\therefore \angle APO = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle OPG = 60^\circ.$$

(2) 如图，过 B 作 $OQ \perp PG$ ，垂足为 Q ．

将 OP , ON 代入①式得, $OE = PE = \frac{1}{8}(16 + x^2)$,
 $\therefore \angle EFM + \angle OEN = 90^\circ$, $\angle AOP + \angle OEN = 90^\circ$,
 $\therefore \angle EFM = \angle AOP$,
 在 $\text{Rt}\triangle EFM$ 和 $\text{Rt}\triangle POA$ 中,

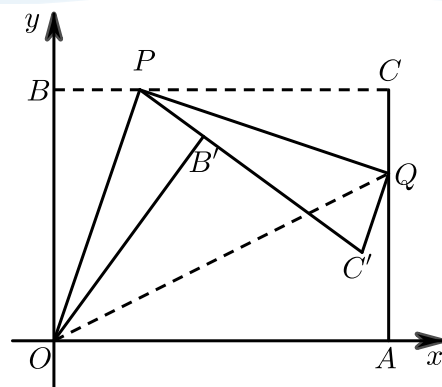
$$\begin{cases} \angle EFM = \angle AOP \\ FM = OA \\ \angle A = \angle EMF \end{cases},$$
 $\therefore \text{Rt}\triangle EFM \cong \text{Rt}\triangle POA(\text{ASA})$,
 $\therefore EM = AP = x$.
 $\therefore$



$$\begin{aligned} FG &= CF = OM = OE - EM \\ &= \frac{1}{8}(16 + x^2) - x \\ &= \frac{1}{8}x^2 - x + 2, \\ \therefore S_{EFGP} &= S_{OCFE} \\ &= \frac{1}{2}(FG + OE) \times BC \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{8}x^2 - x + 2 + \frac{1}{8}(16 + x^2)\right] \times 4 \\ &= \frac{1}{2}(x - 2)^2 + 6, \\ \therefore \text{当 } x = 2 \text{ 时, } S_{EFGP} \text{ 最小, 最小值是 } 6, \\ \therefore AP &= 2, \\ \therefore P(2, 4). \end{aligned}$$

【标注】【知识点】正方形与全等综合

12. 已知一个矩形纸片 $OACB$, 将该纸片放置在平面直角坐标系中, 点 $A(4, 0)$, 点 $B(0, 3)$, 点 P 为 BC 边上的动点(点 P 不与点 B 、 C 重合), 经过点 O 、 P 折叠该纸片, 得点 B' 和折痕 OP . 经过点 P 再次折叠纸片, 使点 C 落在直线 PB' 上, 得点 C' 和折痕 PQ , 连接 OQ . 设 $BP = t$.



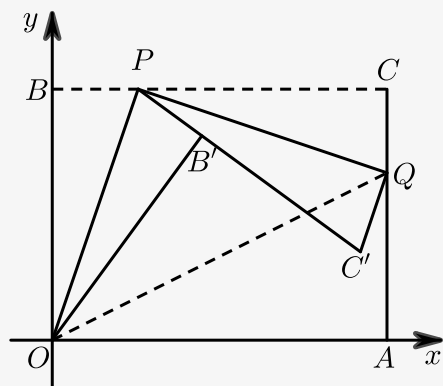
- (1) 当 $t = 1$ 时, 求点 Q 的坐标 .
- (2) 设 $S_{\text{四边形}OQCB} = S$, 试用含有 t 的式子表示 S .
- (3) 当 OQ 取得最小值时, 求点 Q 的坐标 .

【答案】(1) $Q(4, 2)$.

(2) $S = -\frac{2}{3}t^2 + \frac{8}{3}t + 6$ ($0 < t < 4$) .

(3) $Q\left(4, \frac{5}{3}\right)$.

【解析】(1) 如图 :



$\because \triangle OB'P$ 、 $\triangle QC'P$ 分别是由 $\triangle OBP$ 、 $\triangle QCP$ 折叠得到的 ,

$\therefore \triangle OB'P \cong \triangle OBP$, $\triangle QC'P \cong \triangle QCP$,

$\therefore \angle OPB' = \angle OPB$, $\angle QPC' = \angle QPC$,

$\because \angle OPB' + \angle OPB + \angle QPC' + \angle QPC = 180^\circ$,

$\therefore \angle OPB + \angle QPC = 90^\circ$,

$\because \angle BOP + \angle OPB = 90^\circ$,

$\therefore \angle BOP = \angle CPQ$,

又 $\because \angle OBP = \angle C = 90^\circ$,

$\therefore \triangle OBP \sim \triangle PCQ$,

$\therefore \frac{OB}{PC} = \frac{BP}{CQ}$,

$$\because BP = 1, \text{ 则 } PC = 3,$$

$$\therefore \frac{3}{3} = \frac{1}{CQ},$$

$$\therefore CQ = 1,$$

$$\therefore AQ = 2,$$

$$\therefore Q(4, 2).$$

$$(2) \because \triangle OBP \sim \triangle PCQ,$$

$$\therefore \frac{OB}{PC} = \frac{BP}{CQ},$$

$$\because BP = t, BC = 4, AC = 3, \text{ 则 } PC = 4 - t,$$

$$\therefore \frac{3}{4-t} = \frac{t}{CQ},$$

$$\therefore CQ = -\frac{1}{3}t^2 + \frac{4}{3}t.$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} \left(3 - \frac{1}{3}t^2 + \frac{4}{3}t \right) \times 4 = -\frac{2}{3}t^2 + \frac{8}{3}t + 6 \quad (0 < t < 4).$$

$$(3) \because \triangle OBP \sim \triangle PCQ,$$

$$\therefore \frac{OB}{PC} = \frac{BP}{CQ},$$

$$\text{由题意设 } BP = t, AQ = m, BC = 4, AC = 3, \text{ 则 } PC = 4 - t,$$

$$CQ = 3 - m.$$

$$\therefore \frac{3}{4-t} = \frac{t}{3-m},$$

$$\therefore m = \frac{1}{3}t^2 - \frac{4}{3}t + 3 = \frac{1}{3}(t-2)^2 + \frac{5}{3} \quad (0 < t < 4).$$

$$\because OA = 4 \text{ 是定值, 根据勾股定理当 } m \text{ 取最小值时, } OQ \text{ 的值最小,}$$

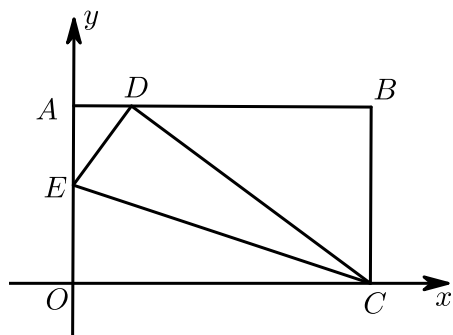
$$\therefore \text{当 } t = 2 \text{ 时, } m \text{ 最小值为 } \frac{5}{3},$$

$$\therefore \text{此时 } Q\left(4, \frac{5}{3}\right).$$

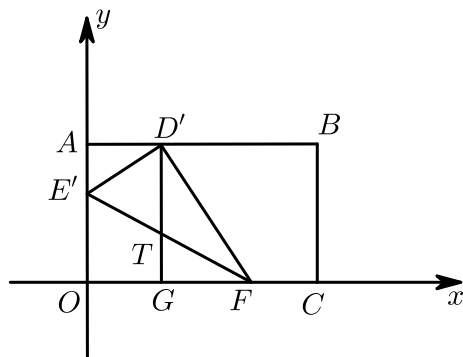
【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

13. 将一矩形纸片 $OABC$ 放在直角坐标系中. O 为原点, C 在 x 轴上, $OA = 6, OC = 10$.

(1) 如图, 在 OA 上取一点 E , 将 $\triangle EOC$ 沿 EC 折叠, 使 O 点落在 AB 边上的 D 点, 求 E 点的坐标.



- (2) 如图, 在 OA 、 OC 边上选取适当的点 E' 、 F , 将 $\triangle E'OF$ 沿 $E'F$ 折叠, 使 O 点落在 AB 边上 D' 点, 过 D' 作 $D'G \parallel OA$ 交 $E'F$ 于 T 点, 交 OC 于 G 点, 设 T 的坐标为 (x, y) , 求 y 与 x 之间的函数关系式, 并直接写出自变量 x 的取值范围.



- (3) 在(2)的条件下, 若 $OG = 2\sqrt{3}$, 求 $\triangle D'TF$ 的面积. (直接写出结果即可)

【答案】 (1) 点 E 的坐标为 $\left(0, \frac{10}{3}\right)$.

(2) $y = -\frac{1}{12}x^2 + 3, 2 \leq x \leq 6$.

(3) $4\sqrt{3}$.

【解析】 (1) 设 $OE = m$,

则 $AE = 6 - m$,

由折叠后 O 点与 D 点重合,

得 $\triangle OCE \cong \triangle DCE$,

$\therefore DE = OE = m$,

$OC = DC = 10$,

在 $Rt\triangle DBC$ 中,

由勾股定理得, $CD^2 = BC^2 + BD^2$,

又 $BC = OA = 6$,

$\therefore BD = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$,

$\therefore AD = 2$,

在 $Rt\triangle ADE$ 中,

由勾股定理得, $DE^2 = AE^2 + AD^2$,

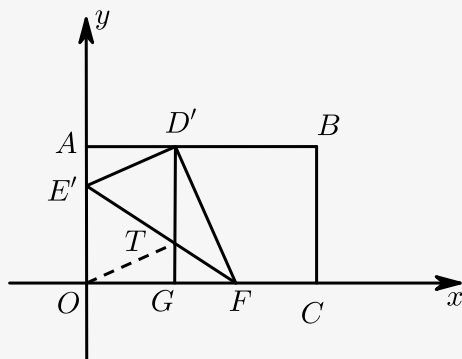
$\therefore m^2 = (6 - m)^2 + 2^2$,

解得 $m = \frac{10}{3}$,

$\therefore$ 点 E 的坐标为 $\left(0, \frac{10}{3}\right)$.

(2) 连接 OT ,

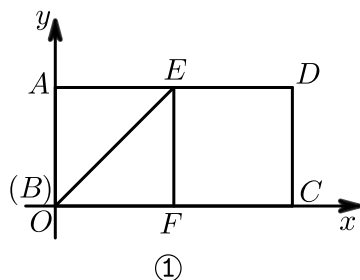
自变量 x 的取值范围是 $2 \leq x \leq 6$.



(3) $\triangle D'TF$ 的面积为 $4\sqrt{3}$.

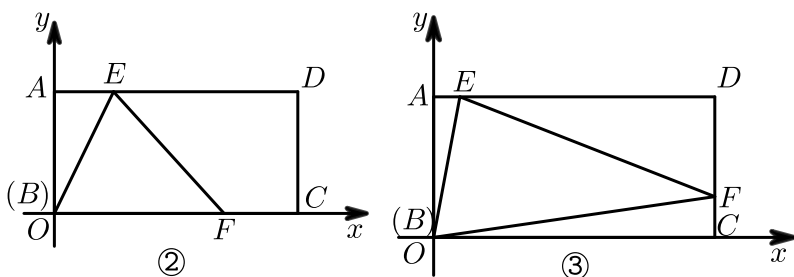
【标注】 【知识点】 翻折问题与勾股定理

14. 如图①, 在矩形 $ABCD$ 中, 将矩形折叠, 使 B 落在边 AD (含端点) 上, 落点记为 E , 这时折痕与边 BC 或者边 CD (含端点) 交于 F , 然后再展开铺平, 则以 B 、 E 、 F 为顶点的 $\triangle BEF$ 称为矩形 $ABCD$ 的“折痕三角形”.



(3)

如图②③，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 2$ ， $BC = 4$ ，该矩形是否存在面积最大的“折痕 $\triangle BEF$ ”？若存在，说明理由，并求出此时点 E 的坐标？若不存在，为什么？



【答案】（1）等腰

（2） $F(2, 0)$.

（3）折痕 $\triangle BEF$ 的最大面积为4时，点 E 的坐标为 $E(0, 2)$ 或 $E(4 - 2\sqrt{3}, 2)$.

【解析】（1）由折叠的定义可知， $\triangle BEF$ 为矩形 $ABCD$ 的“折痕三角形”时， $BF = EF$ ， $\therefore \triangle BEF$ 是等腰三角形 .

（2）如图①，连接 BE ，画 BE 的中垂线交 BC 与点 F ，连接 EF ， $\triangle BEF$ 是矩形 $ABCD$ 的一个折痕三角形 .

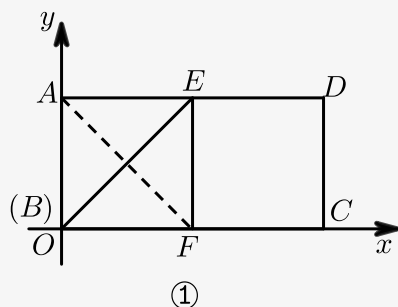
$\therefore$ 折痕垂直平分 BE ， $AB = AE = 2$.

$\therefore$ 点 A 在 BE 的中垂线上，即折痕经过点 A .

$\therefore$ 四边形 $ABFE$ 为正方形 .

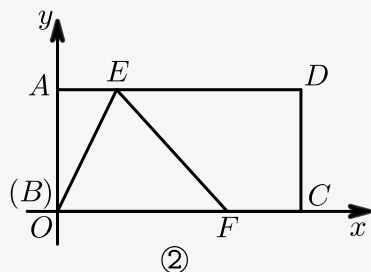
$\therefore BF = AB = 2$.

$\therefore F(2, 0)$.



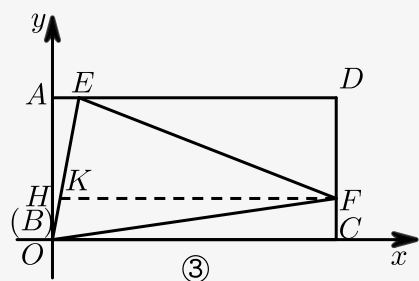
（3）矩形 $ABCD$ 存在面积最大的折痕三角形 BEF ，其面积为4，

理由如下：①当 F 在边 OC 上时，如图②所示 .



$S_{\triangle BEF} \leq \frac{1}{2} S_{\text{矩形}ABCD}$ ，即当 F 与 C 重合时，面积最大为4.

②当 F 在边 CD 上时，如图③所示，



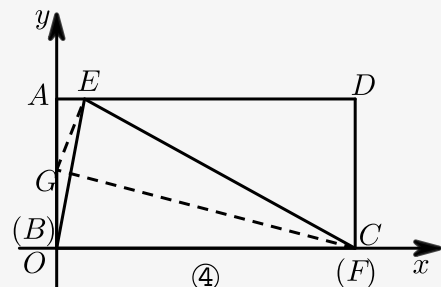
过 F 作 $FH \parallel BC$ 交 AB 于点 H ，交 BE 于 K 。

$$\begin{aligned} \therefore S_{\triangle EKF} &= \frac{1}{2} EK \cdot AH \leq \frac{1}{2} HF \cdot AH = \frac{1}{2} S_{\triangle AHFD}, \\ S_{\triangle BKF} &= \frac{1}{2} KF \cdot BH \leq \frac{1}{2} HF \cdot BH = \frac{1}{2} S_{\triangle BCFH}, \\ \therefore S_{\triangle BEF} &\leq \frac{1}{2} S_{ABCD} = 4. \end{aligned}$$

即当 F 为 CD 中点时， $\triangle BEF$ 面积最大为4.

下面求面积最大时，点 E 的坐标。

①当 F 与点 C 重合时，如图④所示。



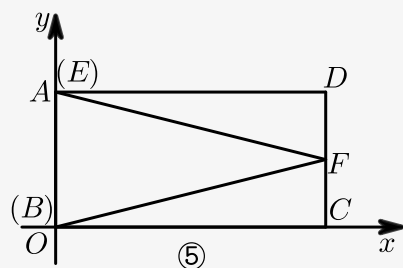
由折叠可知 $CE = CB = 4$ ，

在 $\text{Rt}\triangle CDE$ 中， $ED = \sqrt{CE^2 - CD^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$ 。

$$\therefore AE = 4 - 2\sqrt{3}.$$

$$\therefore E(4 - 2\sqrt{3}, 2).$$

②当 F 在边 DC 的中点时，点 E 与点 A 重合，如图⑤所示。



此时 $E(0, 2)$ 。

综上所述，折痕 $\triangle BEF$ 的最大面积为4时，点 E 的坐标为 $E(0, 2)$ 或 $E(4 - 2\sqrt{3}, 2)$ 。

【标注】【知识点】与四边形有关的新定义